

## La evaporación del agua del suelo bajo control atmosférico

J. V. Giráldez<sup>1</sup>, K. Vanderlinden<sup>1</sup> y H. F. M. ten Berge<sup>2</sup>

1. Departamento de Agronomía, ETSIAM, Universidad de Córdoba, Apartado 3048, 14080 Córdoba.
2. Center for Agrobiological Research, P.O. Box 14, 6700 AA Wageningen, The Netherlands.

**RESUMEN.** La evaporación del agua del suelo bajo condiciones controladas por la atmósfera, también denominado primera etapa de la evaporación, tiene gran importancia en la Agronomía e Hidrología para aprovechar o predecir el comportamiento del agua en un suelo entre chubascos sucesivos. Sin embargo, no se conoce con precisión cuando termina este periodo. En este trabajo se aprovecha una solución analítica exacta de la ecuación de Richards para caracterizar la duración de esta etapa. Se proponen alternativamente dos modelos sencillos para caracterizar la evaporación durante esta etapa en concordancia con los resultados teóricos más precisos

**ABSTRACT.** The depth of soil water lost to the atmosphere under externally controlled conditions is an important parameter for both agronomic and hydrologic models. Nevertheless this quantity is rather imprecisely defined. Using an exact analytical solution to the Richards equation an equation is presented which is contrasted with published experimental data. Alternatively two simple schemes are proposed leading to similar results in close agreement with the theoretical equation.

### 1.-Introducción.

La evaporación del agua del suelo es un proceso de gran importancia en el ciclo hidrológico por su papel regulador térmico en la atmósfera y por la pérdida del recurso desde un depósito tan accesible para el hombre como es el suelo. Desde antiguo (Philip, 1957) se ha establecido que el agua del suelo se evapora siguiendo tres etapas bien diferenciadas: una controlada por las condiciones externas, atmosféricas, primera etapa; otra controlada por las características propias de transmisión de agua del suelo, edafológicas, segunda etapa; y otra controlada por los gradientes térmicos, cuando el suelo está seco y el flujo de agua transcurre preferentemente en forma de vapor, tercera etapa. Desde la perspectiva agronómica es importante mantener el suelo bajo la primera etapa porque en estas condiciones no es previsible que las plantas tengan

dificultades en la absorción de agua. Por ello, y por la variación de la densidad del flujo de agua del suelo en las tres etapas, es interesante definir precisamente la transición entre ellas, especialmente entre la primera y la segunda. Sin embargo esta transición no está demasiado bien caracterizada. Como Markar y Mein (1987) indicaban en una nota posterior la analogía entre los procesos de infiltración y evaporación había sido advertida por muchos autores, pero sin aprovecharla. Algunos autores (Eagleson, 1978) han propuesto expresiones para definir el final de la primera etapa, pero sin justificación. Por ello el objetivo de este trabajo es analizar la transición entre la primera y la segunda etapa de la evaporación del agua del suelo utilizando una solución exacta, completada con soluciones simplificadas, contrastadas ambas con datos experimentales publicados.

### 2.-Descripción del flujo de agua en el suelo.

El flujo de agua en un suelo subsaturado obedece la ecuación de Richards,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (1)$$

que expresa la variación de la humedad volumétrica,  $\theta$ , con respecto al tiempo,  $t$ , como la suma de su variación con respecto al espacio, coordenada vertical,  $z$ , positiva hacia abajo, del flujo de agua debido al gradiente del potencial de la matriz,  $D \partial \theta / \partial z$ , siendo

$$D = K \frac{d\psi_m}{d\theta}, \quad (2)$$

la difusividad,  $K$  la conductividad hidráulica, y  $\psi_m$  el potencial matricial del agua en el suelo, y la variación espacial del flujo debido al gradiente del potencial de gravedad. Esta ecuación no es lineal por la dependencia de  $K$ ,  $\psi_m$  y  $D$  con respecto a la humedad, que impide encontrar una solución analítica. Por ello se ha de recurrir a métodos numéricos para encontrar sus soluciones, aunque se han propuesto también algunas soluciones aproximadas, simplificando las relaciones  $K(\theta)$  y  $D(\theta)$  a ecuaciones

Correspondencia a: K. Vanderlinden, Departamento de Agronomía, ETSIAM, Universidad de Córdoba, Apartado 3048, 14080 Córdoba. E-mail: ag2vandk@uco.es

especiales. Tras el trabajo pionero de Philip (1969) se fueron sugiriendo aproximaciones mejores hasta que en 1988, Broadbridge y White presentaron una solución analítica exacta utilizando la solución, ya conocida, de la ecuación de Burgers. Posteriormente Warrick *et al.* (1990, 1991) completaron la solución respectivamente para un perfil de humedad inicial no homogéneo y para la condición de contorno superior variable en el tiempo. Giráldez y Laguna (1995) exploraron la utilidad de esta solución. En un trabajo reciente Stewart y Broadbridge (1999) evalúan la evolución de la humedad relativa en la superficie del suelo durante la primera fase de la evaporación utilizando la solución analítica de Broadbridge y White (1988) y la relación universal de Gibbs-Boltzmann entre la humedad relativa y el potencial matricial. Estos autores observaron que un descenso gradual de la humedad en superficie corresponde con una caída casi instantánea de la humedad relativa, indicando una transición brusca entre la primera y la segunda etapa de la evaporación, como concluyó también Philip (1957), utilizando la misma relación entre humedad relativa y potencial matricial. Es de advertir que, en el proceso de evaporación del agua en el suelo, el flujo no es sólo en forma líquida, sino también en forma de vapor, en especial a medida que avanza el proceso, y se forma una capa seca en superficie. En este caso se puede recurrir a la formulación del flujo de agua como un flujo asociado de agua y vapor como propusieron Philip y de Vries (1957), aunque su idea está siendo cuestionada en trabajos recientes de Parlange *et al.* (1998) y Cahill y Parlange (1998). Se puede poner en duda, también, la relación universal de Gibbs-Boltzmann. Sin embargo, en este trabajo exploramos la transición entre la primera y segunda fase considerando flujo líquido como primera aproximación.

### 3.-La solución analítica de Broadbridge y White.

La solución de la Ec. (1) para el caso de evaporación, o exfiltración, está sometida a la condición inicial

$$\theta(z, 0) = \theta_i \quad z \geq 0 \quad (3)$$

y la de contorno

$$K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} = e \quad z = 0, \quad e \leq 0 \quad (4)$$

con  $e$  la intensidad de exfiltración. Estas condiciones son válidas hasta el final de la primera etapa,  $t_{fpe}$  que suponemos que corresponde con el momento en el que la humedad en superficie,  $\theta_{sup}$  se mantiene constante e igual a su límite inferior, la humedad residual,  $\theta_r$ :

$$\theta(0, t) = \theta_r \quad t \geq t_{fpe} \quad (5)$$

No se conoce una solución analítica general para la Ec. (1) bajo estas condiciones. La solución propuesta por

Broadbridge y White (1988) es válida para una forma determinada de las características hidráulicas del suelo, como la conductividad hidráulica, normalizada, que ha de ser de la forma

$$K_* = \frac{K - K_r}{\Delta K} = \Theta^2 \frac{C - 1}{C - \Theta} \quad (6)$$

con el subíndice  $r$  indicando el valor residual,  $\Delta K$  el intervalo de valores,  $\Theta$  la humedad normalizada

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{\theta - \theta_r}{\Delta \theta} \quad (7)$$

y  $C$  un parámetro; y la difusividad, Ec. (2), con la forma

$$D = a [\Delta \theta (C - \Theta)]^{-2} \quad (8)$$

siendo  $a$  otro parámetro.

Efectuando una serie de transformaciones Broadbridge y White (1988) obtuvieron una solución exacta en forma paramétrica (véase Apéndice),

$$\Theta = \Theta(u, \partial u / \partial \zeta; \rho) \quad (9)$$

$$z_* = z_*(\tau, u, \zeta; \rho) \quad (10)$$

siendo  $z_* = z/\lambda_s$  la profundidad normalizada, con  $\lambda_s = \alpha^{-1}$  la longitud capilar macroscópica y  $\alpha$  el exponente de la expresión de conductividad hidráulica del suelo "Gardner" (e.g. Raats, 1972). Las variables transformadas son: espacio,  $\zeta$ , tiempo,  $\tau$  e intensidad de exfiltración,  $\rho$ , y  $u$  es una variable auxiliar.

Para la evolución de la humedad normalizada en superficie ( $\zeta = 0$ ,  $z_* = 0$ ) existe una solución en función del tiempo,  $\tau$ , con (Stewart y Broadbridge, 1999, corrigiendo algunos errores tipográficos)

$$u = \exp(\lambda \tau) \quad (11)$$

y

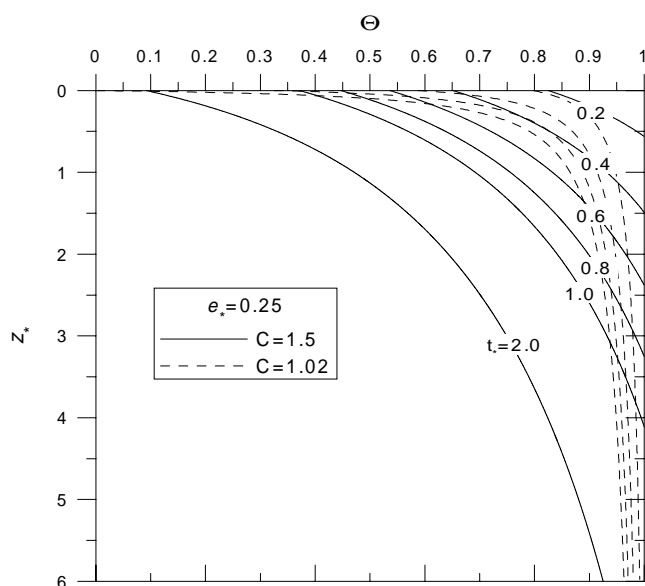
$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \begin{cases} 2\sqrt{-\lambda} \exp(\lambda \tau) \operatorname{Im}[erf(i\sqrt{-\lambda \tau})] + A_0 f\left(-\frac{1}{2} A_0 \sqrt{\tau}\right) & \lambda < 0 \\ 2\sqrt{\lambda} [f(\sqrt{\lambda \tau}) - \exp(\lambda \tau)] + A_0 f\left(-\frac{1}{2} A_0 \sqrt{\tau}\right) & \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

siendo  $\operatorname{Im}[x]$  la parte imaginaria de  $x$ . Las definiciones de los demás parámetros se encuentran en el Apéndice.

### 4.-Aplicación a la primera fase de la evaporación.

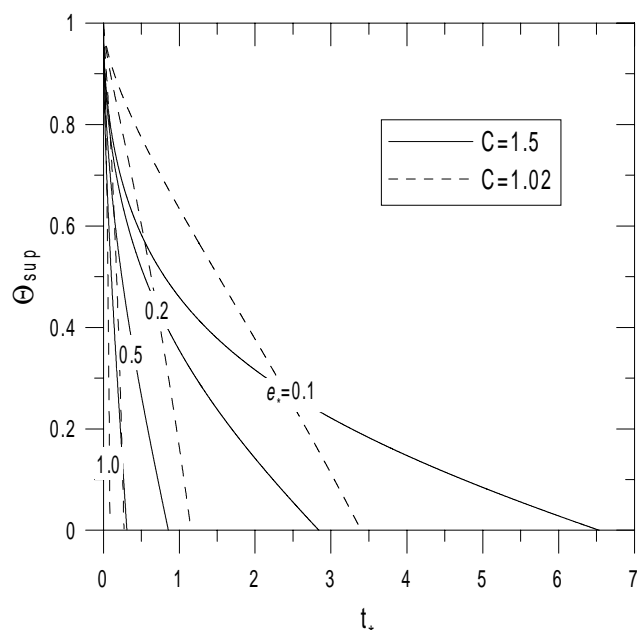
Las Ecs. (9) y (10) definen los perfiles de humedad a lo largo de la primera etapa del proceso de exfiltración. En la

Fig. 1 se pueden ver estos perfiles en momentos consecutivos a lo largo de la primera fase para dos diferentes valores del parámetro  $C$ . Se reconoce el escalón de Green y Ampt para valores de  $C$  próximos a la unidad, valor limitante inferior, que corresponden a suelos no lineales. Cuando el parámetro  $C$  se aproxima a 2, el otro valor extremo propuesto por Broadbridge y White (1988) que corresponde a suelos lineales, se puede ver que los perfiles se suavizan, aumentando notablemente el radio de curvatura.

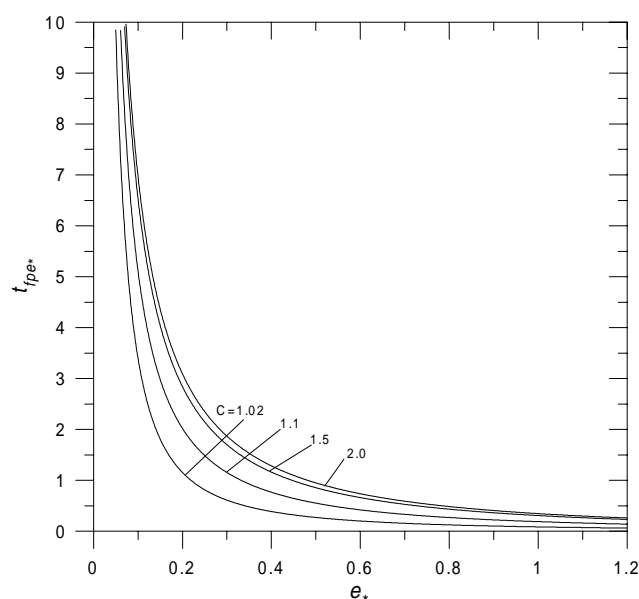


**Fig. 1.** Perfiles de humedad del suelo durante la primera etapa de la evaporación.

Se aprecia cómo el suelo mantiene mejor la humedad cuando la superficie se deseca antes, dependiendo del tipo de suelo, a través del parámetro  $C$ . La Fig. 2 muestra el descenso de la humedad en la superficie del suelo,  $\Theta_{sup}$ . Se puede considerar el final de la primera etapa,  $t_{fpe}$ , cuando  $\Theta_{sup}$  es igual a 0. Obsérvese que la diferencia en duración de la primera etapa para diferentes suelos disminuye cuando la intensidad de exfiltración es menor. Nótese también en el caso de la Fig. 2 que las respectivas curvas de desecación de la superficie para ambos suelos se cruzan, indicando una diferencia substancial en el proceso de exfiltración. La duración de la primera etapa depende del tipo de suelo, pero principalmente de la demanda evaporativa, como también indica la Fig. 3 que representa el  $t_{fpe}$  en función de  $e_s$ , la intensidad de exfiltración normalizada. En ambas Figuras se observa el hecho de que el suelo subyacente no puede satisfacer elevadas demandas evaporativas en la superficie del suelo, causando el rápido desecado de ésta, lo que indica una relación casi-lineal con el tiempo. En el caso de demandas evaporativas más pequeñas se puede ver que el suelo tarda más en desecarse porque la aportación de agua por parte de las capas subyacentes juega un papel más importante en el balance de agua de la capa superficial del suelo.



**Fig. 2.** Evolución de la humedad normalizada en superficie en función del tiempo normalizado.



**Fig. 3.** Variación de la evolución de la duración normalizada de la primera etapa de la evaporación en función de la exfiltración normalizada, para distintos valores del parámetro  $C$ .

## 5.-Modelos simplificados.

Las hipótesis simplificadoras de Green y Ampt de flujo, basadas en la reducción rectangular de los perfiles de humedad, han sido aplicadas con bastante éxito en Hidrología, tras la confirmación de su base física por Philip (1954). De una forma análoga a la propuesta por Swartzendruber (1974) para la infiltración bajo condiciones de flujo se puede establecer una ecuación de flujo del agua durante la primera etapa de la evaporación con una

intensidad  $e_{GA}$  de tal modo que según la ley de Darcy-Buckingham

$$e_{GA} = K \frac{\psi_m^f - \psi_m^{\text{sup}} - L}{L}, \quad (13)$$

en la que  $K$  es la conductividad hidráulica del suelo,  $\psi_m^f$  es la componente matricial del potencial del agua del suelo en el frente de desecación, que se supone igual al de humedecimiento,  $\psi_m^{\text{sup}}$  es la misma magnitud pero en la superficie del suelo y  $L$  es la profundidad a la que está el frente. Usando la ecuación de la conservación de la masa se relaciona el volumen de agua evaporado,  $E_{GA}$ , con la diferencia de humedad entre la humedad inicial  $\theta_i$ , y la humedad final,  $\theta_r$ ,  $\Delta\theta = \theta_i - \theta_r$ ,

$$E_{GA} = L \Delta\theta \quad (14)$$

de modo que, despejando  $L$ , se obtiene una relación entre la evaporación acumulada y la intensidad de evaporación durante la primera fase,

$$E_{GA} = \frac{K \Delta\psi \Delta\theta}{e_{GA} + K} \quad (15)$$

siendo  $\Delta\psi = \psi_m^f - \psi_m^{\text{sup}}$ .

Si se desea expresar esta ecuación en variables normalizadas se puede recurrir a

$$e_{GA}^* = \frac{e_{GA}}{K} \quad E_{GA}^* = \frac{E_{GA}}{\Delta\psi \Delta\theta} \quad (16)$$

de tal modo que la Ec. (15) queda de la siguiente manera

$$E_{GA}^* = \frac{1}{e_{GA}^* + 1}. \quad (17)$$

Gardner y Hillel (1962) obtuvieron otra expresión sencilla para describir el final de la primera etapa. Despreciando el gradiente del potencial debido a la gravedad, y suponiendo, como se puede apreciar en la Fig. 1, que los perfiles de humedad no varían mucho con el tiempo, dedujeron mediante la integración de la Ec. (1), una relación entre la humedad y la profundidad,

$$D \frac{d\theta}{dz} = -\frac{e_{GH}}{L} z, \quad (18)$$

siendo  $e_{GH}$  la intensidad de exfiltración.

Si la difusividad varía exponencialmente con la humedad, en un suelo Gardner modificado,  $D = D_r \exp \beta (\theta - \theta_r)$  con

$D_r$  como la difusividad para suelo seco,  $D_r = D(\theta_r)$ , y  $\beta$  como una constante, se llega a

$$\Theta_{GH} = \theta - \theta_r = \frac{1}{\beta} \ln \left[ 1 + \frac{e_{GH}}{2} \frac{\beta}{L} \frac{\beta}{D_r} (L^2 - z^2) \right] \quad (19)$$

en la que  $\Theta_{GH}$  es un incremento de humedad. Si el contenido total de humedad  $W = \Theta_{GH}(\theta) L$  es uniforme desde el origen, el volumen evaporado  $E_{GH} = W_i - W$  es

$$E_{GH} = W_i - \frac{L}{\beta} \ln \left[ 1 + \frac{e_{GH}}{2} \frac{\beta}{D_r} \frac{L}{L} \right] \quad (20)$$

siendo  $W_i$  el contenido de humedad inicial. Normalizando las variables de esta ecuación se obtiene la siguiente relación:

$$E_{GH}^* = A - \ln(1 + e_{GH}^*), \quad (21)$$

similar a la Ec. (17) aunque con un nuevo parámetro,  $A = W_i \beta / L$ .

## 6.- Ajuste de los modelos a datos experimentales.

Las expresiones anteriores sirven para analizar los datos experimentales que aparecen en la literatura. Las ecuaciones del modelo basado en Green y Ampt permiten identificar los parámetros mediante una simple regresión lineal de los datos experimentales. Escribiendo la Ec. (15) de la siguiente manera

$$e_{GA} = K \Delta\psi \Delta\theta \frac{1}{E_{GA}} - K \quad (22)$$

se puede hallar los parámetros,  $\Delta\psi \Delta\theta$  y  $K$ , necesarias para la normalización de las magnitudes según la Ec. (16). Los resultados de esta regresión se recogen en la Tabla 1. Una vez normalizados los datos experimentales con los parámetros del cuadro se puede aplicar la ecuación deducida con la solución analítica exacta. Broadbridge y White (1987) propusieron una normalización de sus ecuaciones para compararlas con diferentes propuestas. Si se comparan las soluciones de Green y Ampt con las de otros autores como Smith y Parlange (1978) y se equipara el parámetro de normalización en ambas expresiones se obtiene

$$\Delta\psi \Delta\theta \equiv \frac{S^2}{2K} \quad (23)$$

siendo  $S$  la sorptividad. Por el contrario Broadbridge y White (1987) omitieron el factor 0.5 de la parte derecha de la Ec. (23).

Tabla 1. Referencias de los datos experimentales y los resultados del ajuste de los parámetros de normalización.

Autor	Suelo	Textura	$K$ ( $\text{mmd}^{-1}$ )	$K\Delta\psi\Delta\theta$ ( $\text{mm}^2 \text{d}^{-1}$ )	$\Delta\psi\Delta\theta$ ( $\text{mm}$ )	$r$	$n$
Penman (1941)	Rothamsted		18.0	491.8	27.3	.9877	3
Gardner y Hillel (1962)	Pachappa	franco arenoso	19.6	924.0	47.1	.9980	3
Gardner y Hillel (1962)	Indio	franco	63.4	3500.0	55.2	.9616	5
Bond y Willis (1969)	Parshall	franco arenoso fino	28.1	1190.0	42.3	.9738	8

r: coeficiente de regresión, n: número de puntos

La Fig. 4 muestra la buena concordancia entre los valores obtenidos al normalizar los datos experimentales y los calculados con las Ecs. (17) y (21). En esta Figura se

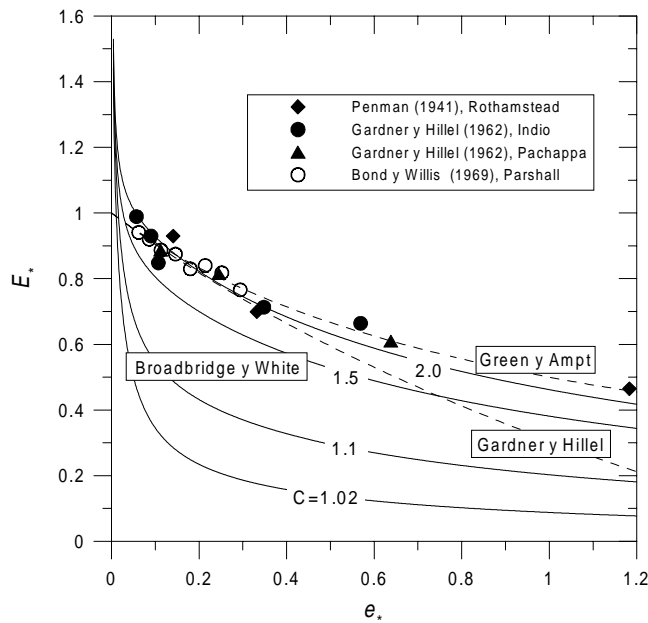


Fig. 4. Relación entre la evaporación acumulada normalizada y la intensidad de evaporación normalizada durante la primera etapa de la evaporación. Comparación de resultados experimentales con las soluciones de Green y Ampt, Gardner y Hillel y Broadbridge y White. Se ha usado un valor de  $A=1$  en la ecuación de Gardner y Hillel.

representan también los resultados obtenidos con la solución exacta de Broadbridge y White (1988), dando resultados más lógicos para pequeñas intensidades de exfiltración, pero poniendo de manifiesto el dudoso significado físico del parámetro  $C$ . Obsérvase también que la pérdida total de agua durante la primera etapa aumenta cuando la intensidad de exfiltración disminuye, de acuerdo con los resultados del trabajo pionero de Philip (1957).

## 7.-Conclusiones.

Utilizando las soluciones a la ecuación de Richards propuestas por Broadbridge y White (1988) se puede caracterizar la evaporación durante la primera etapa, de control atmosférico, y aproximar el final de esta etapa al momento en el que la humedad en superficie es igual a la

humedad residual. Los resultados obtenidos con modelos simplificados, como el de Green y Ampt y el propuesto por Gardner y Hillel (1962) corresponden con la solución analítica. La comparación con datos experimentales muestra un razonable ajuste para los modelos simples. La solución analítica permite obtener un buen ajuste con valores de  $C$  que no están en concordancia con las condiciones de los resultados experimentales, según la interpretación del parámetro  $C$  de Broadbridge y White (1988), poniendo de manifiesto el escaso significado físico de este parámetro.

## Apéndice.

La solución analítica de Broadbridge y White (1988)

$$\Theta = C \left[ 1 - \frac{1}{2\rho + 1 - u^{-1} \partial u / \partial \zeta} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$z_s = \frac{1}{C} \left[ \rho^2 \left( 1 + \frac{1}{\rho} \right) \tau + \rho \left( 2 + \frac{1}{\rho} \right) \zeta - \ln u \right] \quad (\text{A.2})$$

$$u = U_1 + U_2 \quad (\text{A.3})$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{\zeta^2}{\tau} \right) \left[ f \left( \frac{\zeta}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\lambda\tau} \right) + f \left( \frac{\zeta}{\sqrt{\tau}} + \sqrt{\lambda\tau} \right) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{\zeta^2}{\tau} \right) \left[ f \left( -\frac{A_0 \sqrt{\tau}}{2} - \frac{\zeta}{\sqrt{\tau}} \right) - f \left( -\frac{A_0 \sqrt{\tau}}{2} + \frac{\zeta}{\sqrt{\tau}} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

$$f(x) = \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \quad (\text{A.6})$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (\text{A.7})$$

Definición de las variables normalizadas y otros parámetros de Broadbridge y White (1988)

$$C = \frac{b - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{b - \theta_r}{\Delta\theta} \quad (\text{A.8})$$

$$A_0 = 1 + 2\rho - \frac{C\Delta\theta}{C\Delta\theta - \theta_i + \theta_r} \quad (\text{A.9})$$

$$\lambda_s = a/\left[C(C-1)\Delta\theta \Delta K\right] \quad (\text{A.10})$$

$$t_s = a/\left[C(C-1)(\Delta K)^2\right] \quad (\text{A.11})$$

$$e_* = (e - K_r)/\Delta K \quad (\text{A.12})$$

$$t_* = t/t_s \quad (\text{A.13})$$

$$\tau = 4C(C-1) t_* \quad (\text{A.14})$$

$$\rho = e_*/4C(C-1) \quad (\text{A.15})$$

$$\zeta = \int_0^{z_*} (C - \Theta) dz_* \quad (\text{A.16})$$

$$\lambda = \rho(\rho + 1) \quad (\text{A.17})$$

*Agradecimientos:* Los autores agradecen al proyecto 1FD97-0765 el apoyo económico para realizar este trabajo.

## Referencias.

- Bond, J. J. y W.O. Willis. 1969. Soil water evaporation: Surface residue rate and placement effects. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 33: 445-448.
- Broadbridge, P. y I. White. 1987. Time to ponding: comparison of analytic, quasi-analytic, and approximate predictions. *Water Resour. Res.*, 12: 2302-2310.
- Broadbridge, P. y I. White. 1988. Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model. 1. Analytic solution. *Water Resour. Res.*, 1: 145-154.
- Cahill, A. T. y M. B. Parlange. 1998. On water vapor transport in field soils. *Water Resour. Res.*, 34: 731-739.
- Eagleson, P.S. 1978. Climate, soil and vegetation. 4. The expected value of annual evapotranspiration. *Water Resour. Res.*, 5: 731-739.
- Gardner, W. R. y D. I. Hillel. 1962. The relation of external evaporative conditions to the drying of soils. *J. Geophys. Research*, 64: 469-475.
- Giráldez, J. V. y A. Laguna. 1995. Un modelo analítico para el estudio del flujo de agua en suelos subsaturados. *Jornadas sobre la zona no saturada*, Vitoria, 20 noviembre de 1995.
- Markar, M. S. y R. G. Mein. 1987. Modeling of evapotranspiration from homogenous soils. *Water Resour. Res.*, 10: 2001-2007.
- Parlange, M. B., A. T. Cahill, D. R. Nielsen, J. W. Hopmans y O. Wendroth. 1998. Review of heat and water movement in field soils. *Soil & Till. Res.*, 47: 5-10.
- Penman, H. L. 1941. Laboratory experiments on evaporation from fallow soil. *J. Agric. Sci.* 31: 454-465.
- Philip, J. R. 1954. An infiltration equation with physical significance, *Soil Sci.*, 77: 153-157.
- Philip, J. R. 1957. Evaporation, and moisture and heat fields in the soil. *J. Meteorol.*, 14:354-366.
- Philip, J.R. 1969. The theory of infiltration. *Adv. Hydrosci.*, 5:215-296.
- Philip, J. R. y D. A. de Vries. 1957. Moisture movement in porous materials under temperature gradients. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 38: 222-232.
- Raats, P.A.C. 1972. Steady infiltration from sources at arbitrary depth, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* 36:399-401.
- Smith, R. E. y J.-Y. Parlange. 1978. A parameter-efficient hydrologic infiltration model. *Water Resour. Res.*, 3: 533-538.
- Stewart, J. M. y P. Broadbridge. 1999. Calculation of humidity during evaporation from soil. *Adv. Water Resour.*, 5: 495-505.
- Swartzendruber, D. 1974. Infiltration of constant-flux rainfall into soil as analyzed by the approach of Green and Ampt. *Soil Sci.*, 117: 272-281.
- Warrick, A. W., D. O. Lomen y A. Islas. 1990. An analytic solution to Richards' equation for a draining soil profile. *Water Resour. Res.*, 2: 253-258.
- Warrick, A. W., A. Islas y D. O. Lomen. 1991. An analytic solution to Richards' equation for time-varying infiltration. *Water Resour. Res.*, 5: 763-766.