

## UN MODELO ANALÍTICO PARA EL ESTUDIO DEL FLUJO DE AGUA EN SUELOS SUBSATURADOS

GIRÁLDEZ, J.V.<sup>(1)</sup> y LAGUNA, A.<sup>(2)</sup>

Departamento de Agronomía<sup>(1)</sup> y Física Aplicada<sup>(2)</sup>  
Universidad de Córdoba.

### Resumen

El movimiento del agua en el suelo bajo condiciones de subsaturación obedece la ecuación de Richards, una ecuación en derivadas parciales que no suele tener solución analítica en la mayoría de los casos de interés. La propuesta de unas formas especiales para la relación de la conductividad hidráulica y de la difusividad con la humedad, respectivamente, permitió a Broadbridge y White, aprovechar una solución previa a un caso similar, y proponer una solución analítica a la ecuación de Richards.

En este trabajo se explora la posibilidad de formular un modelo de recarga y descarga del suelo basado en las soluciones analíticas aplicadas a la infiltración, evaporación, y desagüe o redistribución del perfil.

### Introducción

El movimiento del agua en un suelo tiene lugar en la mayoría de casos en condiciones de subsaturación, especialmente en regiones de lluvia estacional como las mediterráneas en las que el prolongado periodo seco favorece la evaporación. En estas circunstancias se produce una recarga cuando el agua de lluvia que cae sobre el suelo se infiltra en éste. Posteriormente el agua continua su movimiento descendente hasta los horizontes inferiores, o hacia los acuíferos subyacentes, en un proceso que en términos edafológicos se conoce como redistribución o desagüe, aunque parte del agua puede invertir el sentido del movimiento si el gradiente de potencial forzado por las condiciones atmosféricas, induce un flujo de evaporación.

Todos estos procesos pueden ser descritos por la ecuación de Richards, que resulta al combinar la ecuación de conservación de masa, o continuidad, con la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, simplificada a una relación sencilla entre la densidad de flujo de agua y el gradiente del potencial, también denominada ecuación de Darcy-Buckingham. La ecuación de Richards es una ecuación no lineal por la presencia de magnitudes como la difusividad que depende de la humedad de forma potencial o exponencial, por lo que plantea grandes dificultades para obtener una solución analítica. Este inconveniente se ha resuelto recurriendo a métodos numéricos, o a soluciones simplificadas lineales, que, bajo ciertas condiciones, pueden compensar su imprecisión

con el manejo sencillo de datos de campo con una gran variabilidad espacial. Sin embargo, ni la complejidad de los métodos numéricos permiten siempre una perspectiva del problema, ni las simplificaciones analíticas son suficientes para estimar los detalles de la solución. Se requiere, pues, una solución algo mejor. En fecha ya menos reciente, Broadbridge y White (1988) presentaron una solución analítica para la ecuación de Richards, aprovechando una propuesta previa a una ecuación relacionada, la ecuación de Burgers. Tras la aparición de su informe, algunos autores elaboraron algo más esta solución, entre ellos Warrick y col., (1990, 1991), Sander y col. (1988), Barry y Sander (1991), incluyendo procesos de descarga y escalonamiento de la humedad en el perfil. Más recientemente Parkin y col., (1992, 1995) han utilizado estas soluciones para estimar el almacenamiento de agua en un perfil de suelo tras un periodo de infiltración o desagüe, desarrollando, en el segundo trabajo, una forma adimensional de las soluciones. En este informe se presentan las bases un modelo de recarga y descarga del perfil de un suelo basado en las soluciones analíticas de Broadbridge y White.

### **Soluciones analíticas de la ecuación de Richards**

La ecuación de Richards para el transporte de agua en un medio poroso es

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - K \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (1)$$

que expresa cómo la variación de la humedad volumétrica en el medio,  $\theta$ , con respecto al tiempo,  $t$ , es igual a la suma de las contribuciones de las fuerzas de superficie, gobernadas por la difusividad,  $D$ , y las de gravedad, con  $K$  como la conductividad hidráulica. La coordenada vertical, positiva hacia abajo, es  $z$ . La forma más general de las condiciones de integración de la ecuación es la correspondiente a la situación de lluvia, con una condición inicial

$$\theta(z, 0) = \theta_0 \quad z \geq 0 \quad (2)$$

y de contorno,

$$K - D \frac{\partial \theta}{\partial z} = r \quad z = 0 \quad (3)$$

desde el inicio del proceso hasta que se alcanza el estado de encharcamiento inicial en la superficie, tiempo  $t_e$ , con  $r$  como la intensidad de lluvia, condición de flujo, para, después mantener constante la humedad en superficie, condición de concentración,

$$\theta(0, t) = \theta_1 \quad t \geq t_e \quad (4)$$

La ecuación bajo estas condiciones no suele tener, o no se le conoce, solución analítica. La solución propuesta por Broadbridge y White

es válida para una forma determinada de las características hidráulicas del suelo. La conductividad hidráulica, ha de ser

$$K = \beta + \gamma(b - \theta) + \frac{\lambda}{2(b - \theta)} \quad (5)$$

que, alternativamente se expresa con ayuda de valores normalizados como,

$$K_* = \frac{K - K(\theta_0)}{K(\theta_s) - K(\theta_0)} = \frac{K - K_0}{K_s - K_0} = \frac{K - K_0}{\Delta K} \quad (6)$$

en la que los subíndices indican que las magnitudes se evalúan a las humedades indicadas, inicial,  $\theta$ , y saturada,  $s$ . La humedad, por su parte, se normaliza como

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_s - \theta_0} = \frac{\theta - \theta_0}{\Delta \theta} \quad (7)$$

con lo que resulta,

$$\frac{K - K_0}{\Delta K} = \Theta^2 \frac{C - 1}{C - \Theta} \quad (8)$$

siendo  $C$  un parámetro. La difusividad, que engloba la relación entre la componente matricial del potencial,  $\Psi_m$  y la humedad, es

$$D = a [\Delta \theta (C - \Theta)]^{-2} \quad (9)$$

con  $a$  como otro parámetro. Aunque estos autores claman una gran validez para estas expresiones, en principio ajustables a los datos de todos los suelos, no siempre ocurre así, como López y Giráldez (1988) observaron.

Una serie de transformaciones, como la de Kirchoff,

$$\mu = \int_{-\infty}^{\Psi_m} K d\Psi = \frac{C(C - 1)}{C - \Theta} \quad (10)$$

la de Storm,

$$Z = [C(C - 1)]^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{\mu} \quad (11)$$

y la de Hopf,

$$1 - 2\rho(1 + \rho^{-1}) + \mu^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (12)$$

con los parámetros  $\rho$  y  $\zeta$

$$\rho = \frac{r - K_0}{\delta K} [4C(C - 1)]^{-1} \quad (13)$$

y

$$\zeta = [4C(C - 1)]^{1/2} Z \quad (14)$$

conduce a una ecuación

$$\frac{1}{u} \left[ \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left[ \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right] = 0 \tag{15}$$

con las condiciones

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 2\rho \qquad \tau = 0 \qquad \zeta \geq 0 \tag{16}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \rho(\rho + 1)u \qquad \tau \geq 0 \qquad \zeta = 0 \tag{17}$$

cuya solución,  $u(\zeta, \tau)$  es

$$u = U_1 + U_2 \tag{18}$$

con

$$U_1 = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tau}\right) \left\{ f\left[\frac{\zeta}{\tau^{1/2}} - (\lambda\tau)^{1/2}\right] + f\left[\frac{\zeta}{\tau^{1/2}} + (\lambda\tau)^{1/2}\right] \right\} \tag{19}$$

y

$$U_2 = \frac{1}{(\pi\tau)^{1/2}} \int_0^\infty \exp\left[\int_0^\zeta G(\zeta'') d\zeta''\right] h(\zeta, \tau, \zeta') d\zeta' \tag{20}$$

en donde  $\lambda$  vale,

$$\lambda = \rho(\rho + 1) \tag{21}$$

la función  $f$  está relacionada con la función de error complementaria,  $\text{erfc}(x)$ , Abramowitz y Stegun (1964, Cap. 7),

$$f(x) = \exp(x^2) \text{erfc}(x) \tag{22}$$

y  $h$ , es otra función auxiliar,

$$h(\zeta, \tau, \zeta') = \exp\left[-\frac{(\zeta - \zeta')^2}{\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(\zeta + \zeta')^2}{\tau}\right] \tag{23}$$

La condición inicial puede ser modificada para incluir un perfil escalonado que es mucho más razonable para un suelo sometido a un régimen variable de lluvias con diferente intensidad. Para este caso Warrick y col. (1990) consideraron una solución aplicable a un suelo con un escalón de humedad, que se generaliza fácilmente al caso multiescalón como

$$\theta = \begin{cases} \theta_1 & 0 \leq z < z_1 \\ \theta_2 & z_1 \leq z < z_2 \\ \dots & \dots \\ \theta_n & z_{n-1} \leq z \end{cases} \tag{24}$$

Convirtiendo la variable profundidad  $z_*$  al parámetro auxiliar  $\zeta$

$$\zeta = [C(C-1)]^{1/2} Z = [C(C-1)] \int_0^{z_*} \frac{dz_*}{\mu} \quad (25)$$

se obtiene para el escalón  $i$ ésimo, la variable de posición  $\zeta_i$ ,

$$\zeta_i = \sum_j (z_j - z_{j-1})(C - \Theta_j) \quad (26)$$

en donde se adopta un parámetro auxiliar  $A_j$ , cuyo valor es, a partir de la transformación de Hopf,

$$A_i = 1 + 2\rho - [1 - \Theta_i / C]^{-1} \quad (27)$$

Aplicando esta condición a la solución general, se modifica el término  $U_2$  como se indica, en una expresión que a pesar de su forma, es de cálculo sencillo, si se tiene en cuenta que las funciones exponenciales han de compensarse en la aproximación que se escoja para la función de error complementaria, como las que proponen Abramowitz y Stegun.

$$U_1 = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tau}\right) \left\{ \text{fex}\left[\zeta\tau^{-1/2} - (\lambda\tau)^{1/2}\right] + \text{fex}\left[\zeta\tau^{-1/2} + (\lambda\tau)^{1/2}\right] \right\} \\ = \frac{1}{2} \left\{ \exp(-2\zeta\lambda^{1/2} + \lambda\tau) \text{erfc}\left[\zeta\tau^{-1/2} - (\lambda\tau)^{1/2}\right] + \exp(2\zeta\lambda^{1/2} + \lambda\tau) \text{erfc}\left[\zeta\tau^{-1/2} + (\lambda\tau)^{1/2}\right] \right\} \quad (28)$$

$$U_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_0} \left\{ \exp \left[ -\frac{\zeta^2}{\tau} + \sum_{j=2}^i (A_{j-1} - A_j) \zeta_{j-1} + \left( \frac{A_i \tau^{1/2}}{2} + \frac{\zeta}{\tau^{1/2}} \right)^2 \right] \cdot \right. \\ \left. \left[ \text{erfc} \left[ \frac{\zeta_i}{\tau^{1/2}} - \frac{A_i \tau^{1/2}}{2} - \frac{\zeta}{\tau^{1/2}} \right] - \text{erfc} \left[ \frac{\zeta_{i-1}}{\tau^{1/2}} - \frac{A_i \tau^{1/2}}{2} - \frac{\zeta}{\tau^{1/2}} \right] \right] - \right. \\ \left. \exp \left[ -\frac{\zeta^2}{\tau} + \sum_{j=2}^i (A_{j-1} - A_j) \zeta_{j-1} + \left( -\frac{A_i \tau^{1/2}}{2} + \frac{\zeta}{\tau^{1/2}} \right)^2 \right] \cdot \right. \\ \left. \left[ \text{erfc} \left[ \frac{\zeta_i}{\tau^{1/2}} - \frac{A_i \tau^{1/2}}{2} + \frac{\zeta}{\tau^{1/2}} \right] - \text{erfc} \left[ \frac{\zeta_{i-1}}{\tau^{1/2}} - \frac{A_i \tau^{1/2}}{2} + \frac{\zeta}{\tau^{1/2}} \right] \right] \right\} \quad (29)$$

### Aplicación del modelo

Con el objeto de ilustrar la potencialidad del modelo se ha seleccionado el caso de la evaporación de agua del suelo, por su importancia en ambientes mediterráneos. Se han escogido para ello los parámetros del suelo franco arcillo limoso de Brindabella, usado sucesivamente por Broadbridge y White, y Warrick y col.

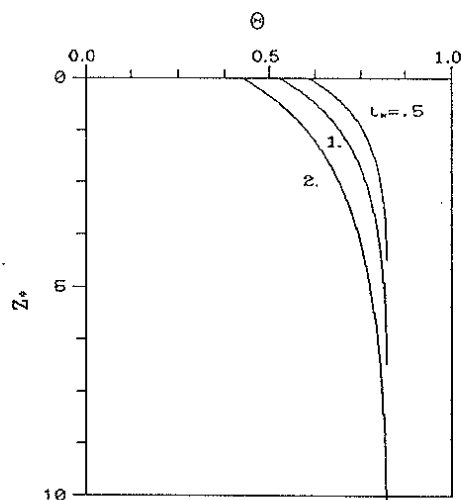


Figura 1. Perfiles de humedad del suelo durante la evaporación.

La figura 1 muestra los perfiles de humedad del suelo en diferentes momentos de un proceso de evaporación. El descenso más rápido de humedad en la superficie se va transmitiendo con mayor lentitud a lo largo del horizonte, apreciándose el poder amortiguador del suelo frente a la perturbación que supone la demanda evaporante en la superficie bien por radiación elevada, bien por déficit de humedad relativa, bien por ambos.

El descenso de la humedad en superficie  $\theta_1$  es notable en la figura 2, con un descenso conforme transcurre el proceso, indicando también la regulación del suelo en un intento de conservar la humedad en condiciones adversas.

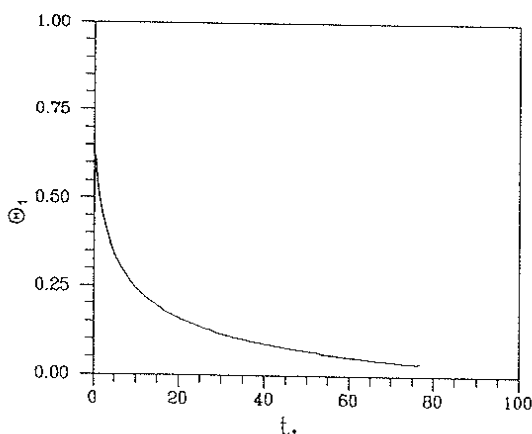


Figura 2. Descenso de la humedad superficial del suelo durante la evaporación.

Finalmente se recoge en la figura 3 la duración de la primera etapa de la evaporación. Definidas teóricamente por Philip en los años cincuenta, y comprobadas experimentalmente en campo por el laboratorio de Phoenix del Servicio de Conservación de Suelos norteamericano en los setenta, se

reconocen tres etapas diferentes en la evaporación de agua de un suelo con condiciones externas constantes: la primera etapa, o de control atmosférico, con intensidad de evaporación constante; la segunda etapa, o de control edafológico, en la que el suelo limita la velocidad de evaporación que disminuye de modo proporcional a la raíz cuadrada del tiempo; y la tercera etapa, o de control térmico, en la que predomina el flujo de agua en forma de vapor. La primera etapa es la más importante desde la perspectiva agronómica, por mantener al suelo sin limitaciones, por lo que es interesante conocer su duración en función de la intensidad de evaporación. Como se observa en la figura, a medida que la intensidad de evaporación disminuye, mayor es la duración de la primera etapa.

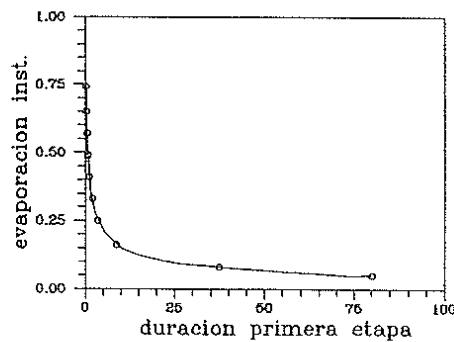


Figura 3. Duración de la primera etapa de la evaporación del suelo.

## Conclusiones

Con el modelo propuesto utilizando las soluciones a la ecuación de Richards propuestas por Broadbridge y White se pueden caracterizar de forma bastante aproximada los procesos de infiltración, evaporación, y desagüe de un suelo. Las principales limitaciones del mismo, como la dificultad de incluir estratificaciones como costras, capas de labor, u horizontes diferenciados, así como zonas de heterogeneidades, como piedras, grietas, raíces, o conductos de animales, que en un modelo numérico más flexible tendrían cabida, se podría compensar con la facilidad de cálculo, que en muchos casos sólo requiere una calculadora de bolsillo, y con el tratamiento general de un medio en el que la variabilidad espacial puede arruinar cualquier esfuerzo de cálculo excesivamente minucioso.

## Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación de la CICYT, del proyecto AGF-92-0998, del que este trabajo forma parte.

## Referencias

- ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I.A. (1964). Handbook of mathematical functions, Dover, Nueva York.
- BARRY, D.A., y SANDER, G.C. (1991). *Water Resour. Res.*, 27:2667-2680.
- BROADBRIDGE, P. E I. WHITE, 1988, *Water Resour. Res.*, 24:145-154.
- LÓPEZ, J.J., y GIRÁLDEZ, J.V. (1988). VII Jornadas técnicas sobre riegos, AERYD, Madrid, 11pp.
- PARKIN, G.W., ELRICK, D.E. y KACHANOWSKI, R.G. (1992). *Water Resour. Res.*, 28:2811-2818.
- PARKIN, G.W., WARRICK, A.W., ELRICK, D.E. y KACHANOWSKI, R.G. (1995). *Water Resour. Res.*, 31:1267-1271. .
- SANDER, G.C., PARLANGE, J.-Y., KÜHNEL, V., HOGATH, W.L, LOCKINGTON, D. y O'KANE, J.P.J. (1988). *J. Hydrol.*, 97;341-346.
- WARRICK, A.W., LOMEN, D.O. y ISLAS, A. (1990). *Water Resour. Res.*, 26:253-258.
- WARRICK, A.W., ISLAS, A. y LOMEN, D.O. (1991). *Water Resour. Res.*, 27:763-766.